



UMA FORMULAÇÃO DE LEI DE PAREDE PARA ESCOAMENTOS TURBULENTOS COM SEPARAÇÃO E TROCA DE CALOR

Daniel O. A. Cruz

Fábio N. Batista

Danielle R. S. Guerra

Universidade Federal do Pará, Departamento de Engenharia Mecânica / CT-UFGPA
66075-900 – Belém, Pa, Brasil

M. V. Bortolus

Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica
31270-901 – Belo Horizonte, MG, Brasil

Resumo. *A descrição e análise do escoamento turbulento próximo ao ponto de separação e na região de recirculação é um problema importante e de grande complexidade, em que uma das principais dificuldades ocorre pelo fato de que a velocidade característica, utilizada na obtenção da estrutura assintótica longe do ponto de descolamento, perde a validade nesta região devido ao desaparecimento da tensão na parede. O presente trabalho apresenta uma escala de comprimento alternativa para a descrição do perfil de velocidade válida para ambas as regiões do escoamento. Além disso, duas leis da parede, recentemente propostas para os perfis de velocidade e temperatura desenvolvidos para a região de separação, são aplicados no modelo de turbulência $K-\epsilon$. As equações governantes são discretizadas usando uma formulação de volumes finitos acoplado a um esquema híbrido para o tratamento simultâneo dos termos convectivo e difusivo. O conjunto de equações é solucionado através do código numérico TEACH-2E. Os resultados são comparados com dados experimentais mostrando boa concordância.*

Palavras-chave: Turbulência, Recirculação, Modelo $K-\epsilon$, Lei da parede, Temperatura

1. INTRODUÇÃO

A aplicação de leis de parede como condição de contorno em modelos de turbulência tem sido um artifício largamente utilizado nos últimos anos. Isto se deve basicamente à sua facilidade de implementação e a relativa robustez proporcionada no cálculo numérico, evitando o grande refinamento da malha necessário para o cálculo adequado da subcamada viscosa. Apesar dessa conveniência, a utilização das leis de parede padrão apresentam a desvantagem de somente serem formalmente válidas nas regiões do escoamento onde o

gradiente de pressão tem pouca influência sobre a estrutura do escoamento próximo à parede. Um exemplo claro dessa deficiência pode ser visto no caso do escoamento próximo ao ponto de descolamento.

Nessa região, a velocidade e comprimento característicos clássicos do escoamento sobre placa plana junto à parede perdem a validade (Stratford, 1959), uma vez que os mesmos se baseiam na tensão da parede, a qual é zero no ponto de descolamento. Com o objetivo de contornar essa dificuldade, muitos autores tem optado pela utilização de modelos de baixo número de Reynolds (Chieng e Launder, 1980, Patel, Rodi e Sheuerer, 1985 e Ciofalo e Collins, 1989), buscando uma maior generalidade em suas modelagens. Essa alternativa, contudo, implica maiores custos computacionais além de dificultar a convergência dos códigos numéricos. Outro ponto importante é a não garantia de que a generalidade procurada seja atingida, pois muitos dos modelos de baixo número de Reynolds possuem constantes que devem ser determinadas de forma empírica para um caso específico. Nesse contexto, seria de grande utilidade uma formulação de lei de parede que mantivesse suas características de facilidade de implementação e generalidade de aplicação.

No presente trabalho, uma formulação generalizada da lei de parede, aplicável aos escoamentos com troca de calor e recirculação, é utilizada como condição de contorno nas equações do modelo de turbulência K-epsilon padrão. Nessa formulação, uma nova equação para a descrição do perfil de temperatura é implementada juntamente com uma expressão alternativa para o comprimento característico válido junto à parede, ambas aplicáveis na região de separação e recirculação (Cruz & Silva Freire, 1996). As equações resultantes são resolvidas numericamente através do método de volumes finitos, utilizando o código TEACH-2E (Teaching Elliptic Axi-Symmetrical Characteristic Heuristically). Os resultados obtidos são comparados com o modelo padrão de lei de parede para o caso do escoamento em torno de um degrau descendente apresentado na fig. 1. Será mostrado que a formulação proposta reproduz com maior precisão os resultados experimentais, principalmente na região de separação, sem acréscimo significativo do custo computacional. Os resultados obtidos indicam que a formulação proposta pode ser implementada com sucesso em códigos numéricos comerciais, tornando o cálculo mais preciso, com custos computacionais ainda reduzidos.



Figura 1-Geometria do problema e domínio computacional

2. AS EQUAÇÕES GOVERNANTES

Na análise fluidodinâmica foram utilizadas as equações médias de Reynolds para o caso incompressível, assim como as equações da energia cinética turbulenta (k) e dissipação (ϵ), as quais são apresentadas a seguir:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + v_T \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial U}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (1)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{v_T}{\sigma_T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} v_T \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial U}{\partial x_i} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2)$$

Onde $v_T = C_\mu k^2 / \varepsilon$; $C_\mu = 0,09$; $C_1 = 1,44$; $C_2 = 1,92$; $\sigma_t = 1,3$; $\sigma_k = 1$

3. A FORMULAÇÃO DE PAREDE

O principal objetivo dessa formulação é estender o domínio de validade das leis de parede, com a finalidade de manter a sua robustez, quando utilizada como condição de contorno em códigos numéricos.

Para o desenvolvimento da formulação, a equação da conservação da quantidade de movimento pode ser aproximada pela equação abaixo, para a região próxima à parede:

$$v \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{u'v'} = \frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} y = \tau \quad (3)$$

onde v é a viscosidade cinemática, τ_w é a tensão na parede, p é a pressão, $\overline{u'v'}$ representa a tensão de cisalhamento turbulenta e ρ é a massa específica do fluido. τ Representa a tensão total por unidade de massa específica. O lado esquerdo da Eq.(3) representa a tensão cisalhante total, a qual é dada pela soma dos termos laminar e turbulento.

Na formulação de parede foram utilizadas as seguintes equações:

$$u = \frac{\tau_w}{|\tau_w|} \frac{2}{k} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} y} + \frac{\tau_w}{|\tau_w|} \frac{u_T}{k} \ln \left(\frac{y}{L_C} \right) ; \quad L_C = \frac{-\frac{\tau_w}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^2 + 2v \frac{dp}{dx} u_R}}{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}} \quad (4, 5)$$

A velocidade u_R que aparece na equação (5) é dada pela relação abaixo:

$$u_R = \sqrt{\tau} \quad (6)$$

A equação (4), apesar de ser uma formulação simplificada, ainda apresenta o inconveniente de ser uma equação transcendental com relação a tensão na parede. Segue abaixo o procedimento adotado para contornar essa dificuldade.

A implementação numérica das relações acima foi feita da seguinte forma, seja a seguinte relação

$$\tau = C_\mu^{1/2} k + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

A equação (7) representa uma primeira estimativa para a tensão na parede. Note que essa estimativa é semelhante a aproximação feita por Launder (1974), com exceção do termo de tensão laminar, o qual foi introduzido para melhorar essa aproximação quando $y^+ < 30$, pois nesse modelo a lei da parede é válida se $y^+ > 11$, abaixo disso a subcamada viscosa se manifesta.

A relação (7) consiste na primeira aproximação para a tensão na parede, a qual será utilizada para linearizar o processo de cálculo da tensão na parede. Essa aproximação foi utilizada na expressão feita por Launder(1974), para fornecer uma nova aproximação da tensão na parede .

$$\tau_{wo} = \frac{u\sqrt{\tau\rho\bar{k}}}{\ln\left(Ey\frac{\sqrt{\tau}}{v}\right)} C_{\mu}^{1/4} ; \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{\tau - \tau_w}{y} \quad (8, 9)$$

A equação (9) representa o cálculo do gradiente de pressão a partir da eq.(3). Este procedimento é utilizado com o objetivo de melhorar a convergência do código numérico.

A expressão (10) mostra como o comprimento característico da eq. (5) foi calculado. Vale ressaltar que o mesmo foi linearizado com a introdução da tensão na parede calculada pela eq. (8).

$$L_C = \frac{-\frac{\tau_{wo}}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{\tau_{wo}}{\rho}\right)^2 + 2v\frac{dp}{dx}u_R}}{\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}} ; \quad \tau_w = \frac{u\sqrt{\tau\rho\bar{k}}}{\left[2\sqrt{\left|\frac{\tau}{\tau_{wo}}\right|} + \ln\left(\frac{y}{L_C}\right)\right]} \quad (10, 11)$$

O cálculo da tensão na parede é feito utilizando-se a eq. (11). Essa equação é obtida a partir das relações (7) (8) e.(10) e da seguinte hipótese:

$$u_{\tau} = \sqrt{\tau} \quad (12)$$

O sinal da tensão na parede fica sendo dado pelo sinal da velocidade u junto à parede. Para a análise do caso térmico, as equações utilizadas são apresentadas a seguir:

$$\frac{T_w - T}{Q_w} = \frac{Pr t}{\kappa C_p \rho u_{\tau}} \ln \left[\frac{\sqrt{\tau_w/\rho} + y dP/dx - \sqrt{\tau_w/\rho}}{\sqrt{\tau_w/\rho} + y dP/dx + \sqrt{\tau_w/\rho}} \right] + C_q \quad (13)$$

$$C_q = \frac{Pr t}{\kappa C_p \rho u_{\tau}} \left[\ln \left[\frac{[E4ur^3Pr]}{v|dP/dx|} \right] \right] \quad (14)$$

Onde E=9.8 e Prt=0.9 e na equação (13) τ_w foi obtido através da eq. (11).

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste trabalho foi utilizado como ferramenta numérica o programa TEACH- Teaching Elliptic Axi-Symmetrical Characteristic Heuristically (Gosman,1976), desenvolvido no Imperial

College. O programa incorpora o algoritmo SIMPLE, específico para solucionar o

acoplamento pressão-velocidade em escoamentos incompressíveis. As equações que governam o escoamento, são discretizadas pela técnica de volumes finitos, acoplada a um esquema híbrido o qual é utilizado para o tratamento dos termos convectivos e difusivos simultaneamente

Como condições de contorno, impõe-se na entrada perfis de velocidade, de energia cinética e de dissipação a partir dos perfis experimentais de U e u' obtidos por Vogel e Eaton (1985). Nas paredes são impostas as condições de velocidade normal nula e de não deslizamento, utilizando o modelo de parede apresentado neste trabalho. Finalmente, na saída do domínio, supõe-se que os gradientes das diversas variáveis na direção do escoamento sejam nulos. Tem-se ainda como condições : camada limite turbulenta na entrada, número de Reynolds de 28.000, $\delta/H=1,1$ e a relação entre a saída e entrada do túnel $h_2/h_1=1,25$.

A melhor relação entre precisão e tempo de CPU foi conseguida utilizando-se uma malha de 146×102 pontos.

Abaixo, são mostrados os resultados obtidos com a presente formulação quando comparados com o modelo clássico de Launder e Spalding (1974) e com dados experimentais de Vogel e Eaton(1985). Dessa forma, são apresentados os gráficos de comparação dos perfis de velocidade e temperatura além do número de Stanton e do C_f .

Nos perfis de velocidade pode ser visto que, próximo à parede, a presente formulação fornece um resultado melhor que a formulação padrão, longe da parede os resultados se equivalem, uma vez que nessa região ambos apresentam a mesma formulação. Essa diferença é suficiente para provocar uma melhoria na previsão do coeficiente de atrito e no ponto de recolamento como pode ser visto na figura 5.

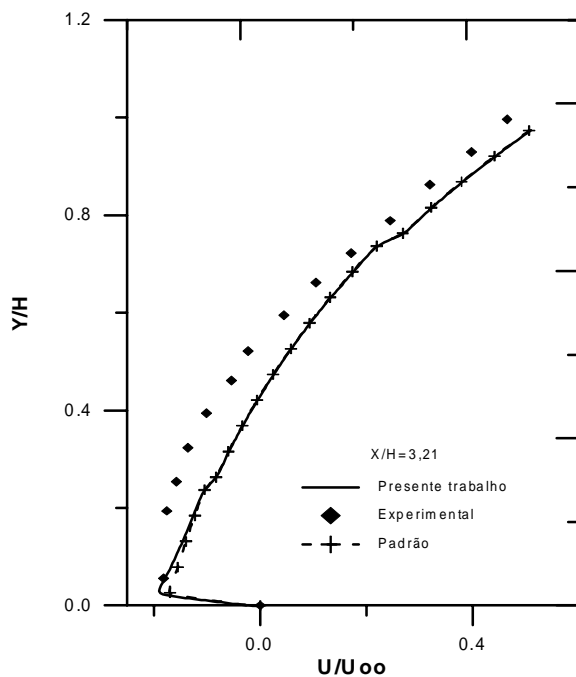


Figura 2-Comparação do perfil de velocidade junto à parede; $x/H=3,21$

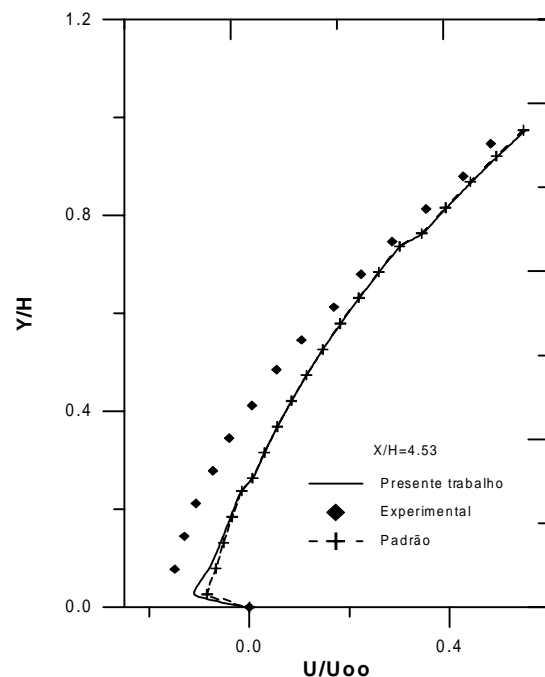


Figura 3-Comparação do perfil de velocidade junto à parede; $x/H=4,53$

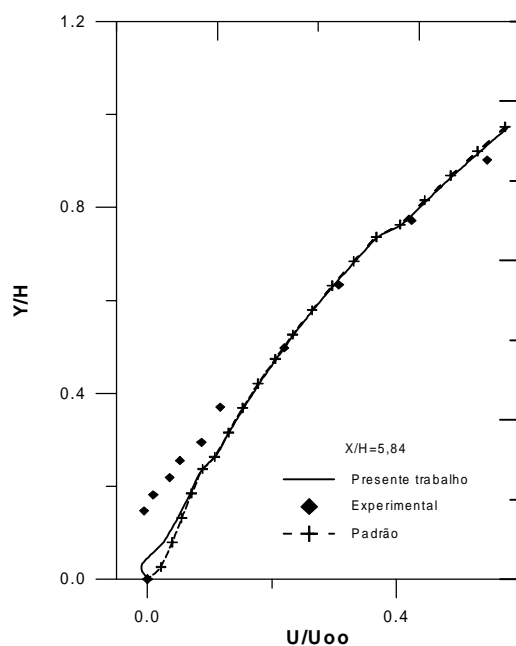


Figura 4-Comparação do perfil de velocidade junto à parede; $x/H=5,84$

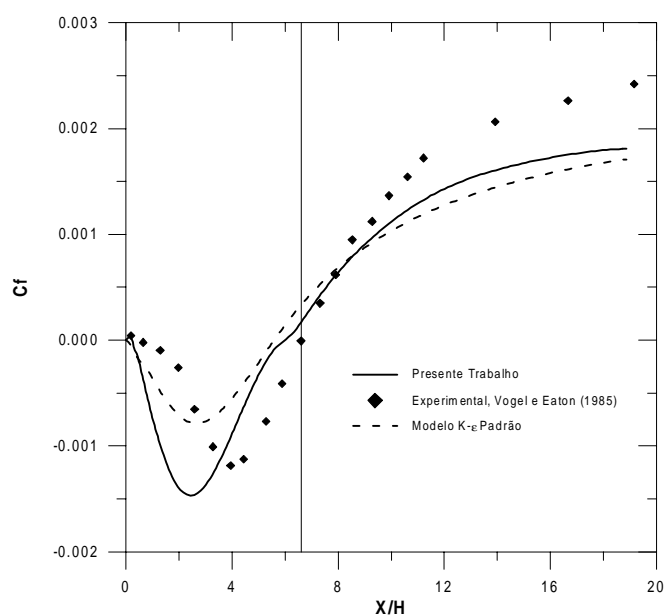


Figura 5-Comparação do coeficiente de fricção (C_f). A linha vertical representa a posição do ponto de recolamento

No caso dos perfis de temperatura as diferenças entre os resultados da presente formulação e do modelo padrão são mais acentuadas. Pode-se notar que a temperatura calculada na parede usando-se a eq. (13) está mais próxima dos resultados experimentais que a fornecida pelo modelo padrão, como mostrados nas figuras 6-9. Este fato se reflete no cálculo do número de Stanton como pode ser visto na figura 10 a qual mostra que a presente formulação fornece resultados superiores aos da formulação padrão, principalmente na região de separação.

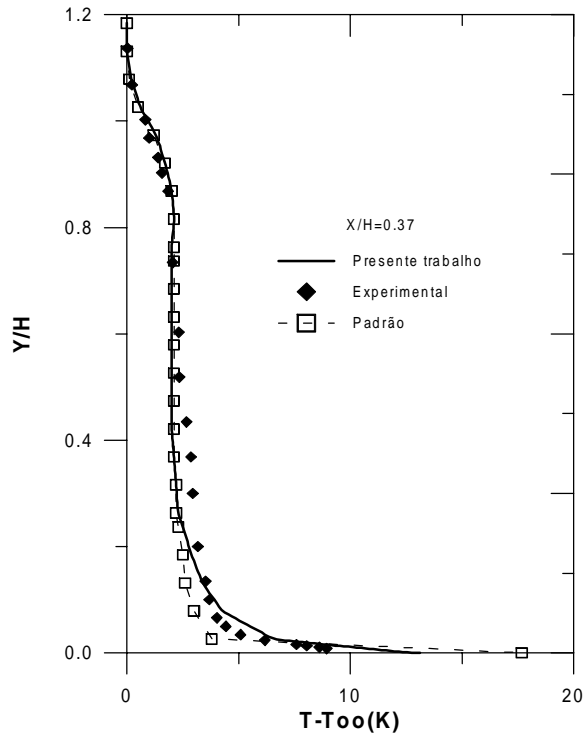


Figura 6-Perfil de temperatura próximo à parede; $x/H=0,37$

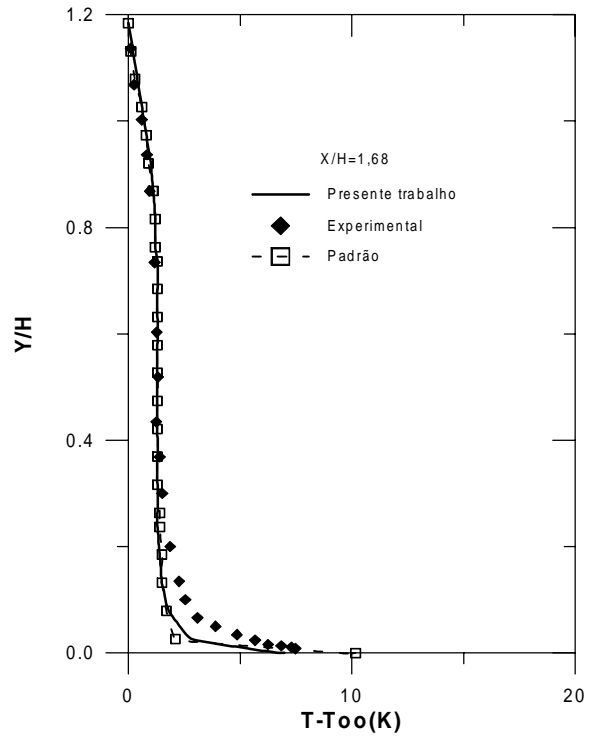


Figura 7-Perfil de temperatura próximo à parede; $x/H=1,68$

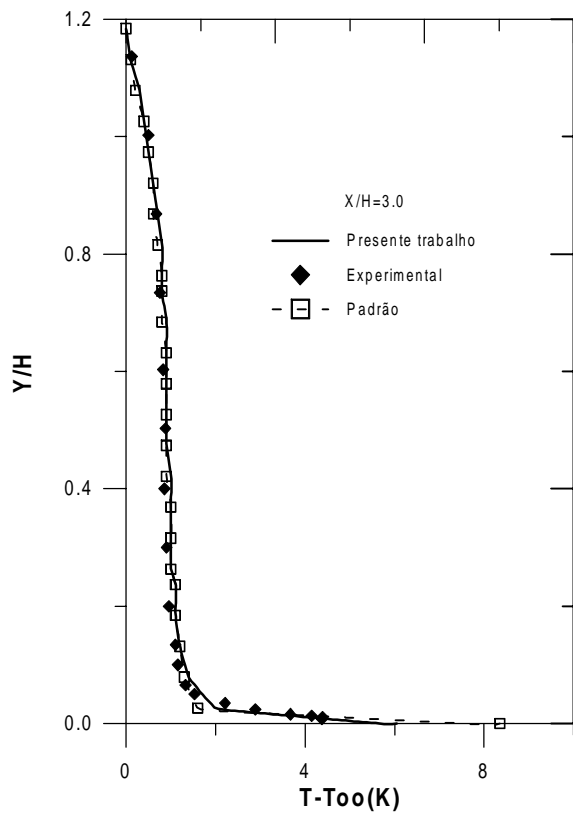


Figura 8-Perfil de temperatura próximo à parede; $x/H=3,0$

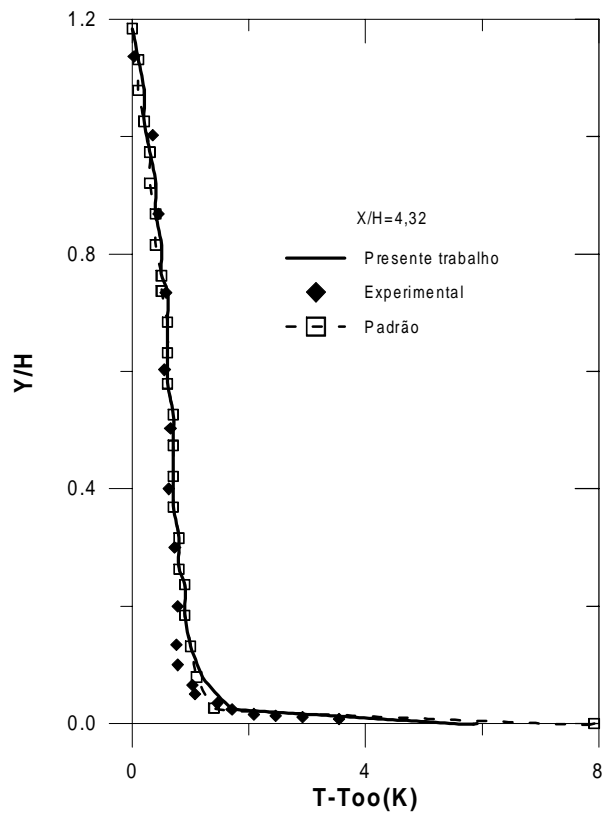


Figura 9-Perfil de temperatura próximo à parede; $x/H=4,32$

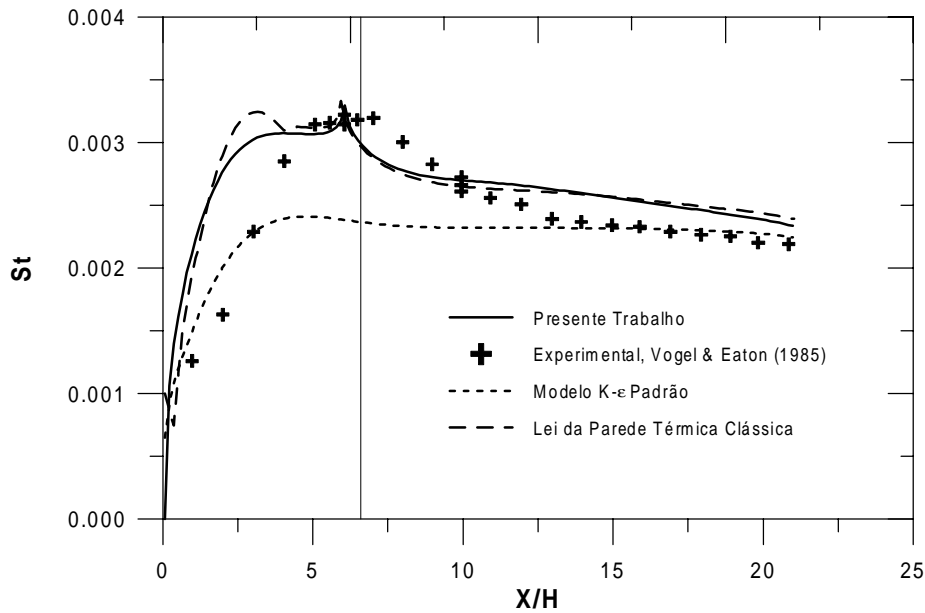


Figura 10-Comparação do número de Stanton (St). A linha vertical representa a posição do ponto de recolamento.

Na Figura 10, aparece uma comparação entre o valor do número de Stanton calculado utilizando-se a formulação padrão de Launder e Spalding para a temperatura próximo à parede, juntamente com a formulação de lei de parede proposta aqui para o perfil de velocidade. Como se pode notar, uma melhora na previsão do fluxo de calor na parede, quando comparado com a formulação padrão foi obtida, causada unicamente pela melhor descrição do escoamento nessa região, embora algumas oscilações no valor do número de Stanton, na região de recirculação possam ser observadas, devido ao fato de a lei da parede para o perfil de temperatura, neste caso, não descrever adequadamente o fenômeno na região de escoamento reverso.

Na tabela abaixo é mostrada a posição do ponto de recolamento para os modelos teóricos e para o caso experimental. Pode-se notar a melhoria nas previsões introduzida pela presente formulação.

Tabela 1 – Pontos de recolamento calculados e experimental

PONTO DE RECOLAMENTO	X/H
EXPERIMENTAL	6.6
FORMULAÇÃO PROPOSTA	6.0
FORMULAÇÃO PADRÃO	5.5

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada uma nova formulação da lei da parede para a descrição dos escoamentos turbulentos próximos a superfícies sólidas com recirculação. Para a implementação desta formulação foi utilizado o código numérico TEACH-2E, o qual resolve as equações médias de Reynolds juntamente com as equações clássicas do modelo k-epsilon de turbulência. Dentre as principais vantagens deste programa estão a sua robustez e a sua estrutura transparente, o que permite um controle maior de seus diversos módulos. Através dos resultados obtidos, foi possível comparar os perfis de velocidade e temperatura obtidos

pela formulação proposta com a formulação padrão de Launder e Spalding, e com os experimentos de Vogel e Eaton.

Deste modo, foi observado que a formulação proposta, para a região próximo à parede, se aproxima melhor dos resultados experimentais de Vogel e Eaton do que a formulação padrão com a grande importância que esta melhora ocorre sem que haja algum acréscimo de custo computacional.

6. REFERÊNCIAS

- Bortolus, M.V. & Giovannini, A., 1995, Numerical Prediction of Wall Heat Transfer in Complex Turbulent Flows, *Turbulence-Heat and Mass Transfer* 1, pp.228-232, Begell House.
- Chiang, C.C. & Launder, B.E., 1980, On the Calculation of Turbulent Transport Downstream for an Abrupt pipe expansion, *Numerical Heat Transfer*, vol.3, pp189-207.
- Ciofalo, H. & Collins, M.W., 1989, k- ϵ Predictions of Heat Transfer in Turbulent Recirculating Flows Using an Improved Wall Treatment, *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol.15, pp21-47.
- Cruz, D.O.A. & Silva Freire, A.P., 1996, On Single Limits and the Asymptotic Behaviour of Separating Turbulent Boundary Layers, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 41, pp.2097-2111.
- Gosman, A.P. & Ideriah, F.J.K., 1976, Manual TEACH-2E: A General Computer Program for Two-Dimensional, Turbulent, Recirculating Flows, Imperial College, Londres.
- Launder, B.E. & Spalding, D.B., 1974, The Numerical Computation of Turbulent Flows, *Computer Methods in Applied Mechanics*, vol.3, pp269-289.
- Patel, V.C., Rodi, W. & Sheuerer, G., 1985, Turbulence Models for Near Wall and Low-Reynolds Number Flows: a Review, *AIAA Journal*, vol.23, n.9, pp1308-1319.
- Stratford, B.S., 1959, An Experimental Flow With Zero Skin Friction Throughout its Region of Pressure Rise, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.5, n.17.
- Vogel, J.C., 1984, Heat Transfer and Fluid Mechanics Measurements in the Turbulent Reattaching Flow Behind a Backward-Facing Step, Tese de Doutorado, Stanford University.
- Vogel, J.C. & Eaton, J.K., 1985, Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward Facing Step, *Journal of Heat Transfer Transactions of ASME*, vol.107, pp 922-929.

A FORMULATION OF LAW OF THE WALL FOR TURBULENT FLOW WITH SEPARATION AND HEAT TRANSFER.

Daniel O. A. Cruz

Fábio N. Batista

Danielle R. S. Guerra

Universidade Federal do Pará, Departamento de Engenharia Mecânica / CT-UFGPA
66075-900 – Belém, Pa, Brasil

M. V. Bortolus

Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica
31270-901 – Belo Horizonte, MG, Brasil

***Abstract.** The description and analysis of the turbulent flow close to the separation point and in the recirculation region it is an important problem of great complexity. One of the main difficulties is the fact that the characteristic velocity used in the obtaining of the asymptotic structure far away from the reattachment point, loses its validity in this region due to the disappearance of the shear stress at the wall. This work presents an alternative length scale for the description of the velocity profile valid for both attachment and reattachment regions. Besides, two laws of the wall, recently proposed for the profiles of speed and temperature, developed for the separation region, are applied to the treatment of the near wall region in the turbulence K-epsilon model. The governing equations are rewriting applying the finite volumes approach coupled to a hybrid scheme for the simultaneous treatment of the convective and difusive terms. The group of the equations of finite differences is solved through the numeric code TEACH-2E. The results are compared with experimental data showing good agreement.*

***Key-words:** Turbulence, K- ϵ Model, Law of the wall, Temperature*

.